УДК 530.1

А. А. Зайцев, П. В. Дидковский

ВЕЩЕСТВЕННЫЙ АНАЛОГ СИСТЕМЫ НУШ И МНОГОЧЛЕНЫ ТИПА ВИЕТА

Рассмотрен вещественный аналог системы нелинейных уравнений Шредингера (НУШ). Для нее получена пара Лакса и показано, что она инвариантна относительно преобразования Шлезингера, с помощью которого найдено семейство решений, выраженных через многочлены типа Виета.

The article considers the real analog of the Schrodinger nonlinear system of equations (NSE). The generated Lax pair reveals to be an invariant for Schlesinger transformation, with the help of which a set of solutions expressed through Viète type polynomials has been founded.

Ключевые слова: нелинейное уравнение Шредингера, пара Лакса, многочлены Виета.

Keywords: Schrodinger nonlinear equation, Lax pair, Viete type polynomials.

1. Рассмотрим следующую матричную пару Лакса:

$$\psi_ч = (J\lambda + S)\psi\ ,\ \psi_t = 2\nu(J\lambda^2 + S\lambda + W)\psi\ , \qquad (1)$$

где $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 0 & u \\ v & 0 \end{pmatrix}$, $W = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} uv & -u_x \\ v_x & -uv \end{pmatrix}$.

Она совместна, если функции u и v удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$u_t + \nu(2u^2 v - u_{xx}) = 0\ ,\ v_t - \nu(2uv^2 - v_{xx}) = 0\ . \qquad (2)$$

Эта система является вещественным аналогом известной системы НУШ [1—4]. В данной работе излагаются результаты изучения некоторых свойств систем (1) и (2).

2. Простейшее семейство решений систем (1) и (2) получается, если положить v=0. Тогда второе уравнение системы (2) вырождается в равенство 0=0, а первое сводится к уравнению теплопроводности

$$u_t - \nu u_{xx} = 0\ . \qquad (3)$$

Одно из решений уравнения (3) имеет вид

$$u = V_{m1} = \sum_{k=1}^{m} E_k\ ,\ E_k = a_k \exp(b_k x + \nu b_k^2 t)\ , \qquad (4)$$

где $b_k \neq b_l$ при $k \neq l$.

В данном случае система (1) легко решается, и ее общее решение имеет вид $\psi = \psi_{m1} c$, где c — постоянный вектор, и

$$\psi_{m1} = \exp(J(\lambda x + 2\nu\lambda^2 t))(I - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2\lambda - b_k} E_k S_0), \; S_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где I – единичная матрица.

3. Решения систем (1), (2) можно размножить с помощью преобразований Дарбу и Шлезингера. Рассмотрим второе из этих преобразований. Справедливо следующее утверждение.

Утверждение. *Пусть u, v решения системы (2),* ψ *– решение системы (1), причем* $u \neq 0$. *Тогда функции*

$$u^* = -u(\ln u)_{xx} + u^2 v, \;\; v^* = \frac{1}{u} \tag{6}$$

также будут решениями системы (2), и вектор-функция

$$\psi^* = (P\lambda + Q)\psi,$$

где

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; Q = -\frac{1}{2u}\begin{pmatrix} u_x & u^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

будет решением системы (1), если в матрицах S и W функции u, v заменены соответственно на u^* *и* v^*.

Как и в случае системы НШ, итерирование преобразований (6) ведет к цепочке Тоды следующим образом. Полагаем

$$u = \exp q_n, \; v = \exp(-q_{n-1}), \; u^* = \exp q_{n+1}, \; v^* = \exp(-q_n).$$

Тогда формулы (6) приводят к уравнениям цепочки Тоды [1–3]

$$q_{n,xx} = \exp(q_{n-1} - q_n) - \exp(q_n - q_{n+1}).$$

Таким образом, положительные решения системы (2) порождают вещественные решения цепочки Тоды. Эта ситуация отличается от той, которая имеет место в случае системы НШ: там решения оказываются комплексными.

4. Последовательность *(n–1)*-го числа действий преобразования Шлезингера на решения, полученные в п. 2, приводит к новым решениям системы (2), которые можно представить в виде,

$$(u, v) = (V_{mn} V_{m,n-1}^{-1}, V_{mn-2} V_{m,n-1}^{-1}),$$

а также к следующему решению системы (1):

$$\psi_{mn} = (P\lambda + Q_{mn}) \exp(J(\lambda x + 2\nu\lambda^2 t))(I - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2\lambda - b_k} E_k S_0),$$

где

$$Q_{mn} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \left(\ln \dfrac{V_{m,n-2}}{V_{m,n-1}}\right)_x & V_{m,n-1} V_{m,n-2}^{-1} \\ V_{m,n-2} V_{m,n-1}^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь V_{mn} — однородная функция степени n от m переменных $E_k, k = \overline{1, m}$, определяемая рекуррентным соотношением

$$V_{m,n-1}V_{m,n+1} = V_{mn}V_{mn,xx} - V_{mn,x}^2 \tag{8}$$

и равенством $V_{m0} = 1$. Расчеты для низших степеней показывают, что эти функции являются многочленами типа Виета, линейно зависящими от каждого аргумента. Доказать эту особенность для произвольного числа n пока не удалось. Интересно, что рекуррентное соотношение для решений ψ_{mn} тоже приводит к функциям V_{mn}. Расчеты при n=1,2,3 показывают, что они также являются многочленами типа Виета и подчиняются соотношению (8). Отметим, что через многочлены типа Виета выражаются решения уравнений цепочки Тоды [5].

Заключение

Полагаем, что системы (1) и (2) представляют интерес для теории интегрируемых динамических систем и поэтому заслуживают подробного изучения. С теоретической точки зрения система (2) имеет преимущество по сравнению с системой НШ, поскольку из ее решений получаются вещественные решения цепочки Тоды, а не комплексные как в случае НШ. Кроме того, можно ожидать, что благодаря преобразованию Шлезингера для систем (1) и (2) будет получена содержательная теория функций V_{mn}, которые должны найти многочисленные применения в теории интегрируемых уравнений.

Список литературы

1. *Дидковский П. В., Зайцев А. А.* Замкнутые цепочки решений нелинейных уравнений Шредингера (НУШ) // Вестник Российского государственного университета им. И. Канта. Калининград, 2008. Вып. 4. С. 17—20.
2. *Захаров В. Е., Манаков С. В. и др.* Теория солитонов: Метод обратной задачи. М., 1980.
3. *Тахтаджян Л. А., Фадеев Л. Д.* Гамильтонов подход в теории солитонов. М., 1986.
4. *Абловиц М., Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи. М., 1987.
5. *Зайцев А. А., Лебле С. Б.* Теория нелинейных волн: учеб. пособие / Калинингр. ун-т. Калининград, 1984.
6. *Свинолупов С. Н., Ямилов Р. Н.* // ТМФ. 1994. Т. 98, №2. С. 207.
7. *Адлер В. А., Шабат А. Б.* // ТМФ. 1997. Т. 11, №3. С. 323.
8. *Yrov A. V.* // Dynamics of PDE. 2004. V. 1, №2. P. 209—223.
9. *Зайцев А. А.* Лекции по теории динамических систем. Калининград, 2004.

Об авторах

А. А. Зайцев — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр., РГУ им. И. Канта.
П. В. Дидковский — асп. РГУ им. И. Канта, pavel_di@bk.ru.

Authors

A. Zaytsev — Dr., IKSUR.

P. Didkovsky — PhD student, IKSUR, pavel_di@bk.ru.